Les 2 parties sont indépendantes

I On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle définies sur $[0, 1]$. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle, continues sur $[0, 1]$ et qui s'annulent en 0 et en 1.

Soit f la fonction numérique de deux variables réelles définie sur $[0, 1] \times [0, 1]$ par :

$$f : \begin{cases} (x, y) \longmapsto y(1 - x), & \text{si } y \leqslant x \\ (x, y) \longmapsto x(1 - y), & \text{si } y > x. \end{cases}$$

Soit, enfin, φ l'application qui à toute fonction g, de $\mathcal{E}$, fait correspondre une fonction $h = \varphi(g)$, de $\mathcal{C}$, définie par :

$$h : x \longmapsto \int_0^1 f(x, y)\, g(y)\, dy$$

1° *a.* Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

c. Déterminer $h_1 = \varphi(g_1)$, où g_1 est définie par :

$$g_1 : y \longmapsto \sin \pi y.$$

2° *a.* Montrer que, quelle que soit g de $\mathcal{E}$, la fonction $h = \varphi(g)$ est dérivable deux fois sur $[0, 1]$ et déterminer ses dérivées première et seconde; que peut-on dire de cette dernière?

b. Déterminer le noyau de φ; qu'en conclure?

3° Soit α un réel non nul. On se propose de déterminer, lorsqu'elles existent, les fonctions u, de $\mathcal{E}$, solutions de l'équation :

(1) $$\varphi(u) = \alpha u$$

et vérifiant la relation :

(2) $$\int_0^1 [u(t)]^2\, dt = 1$$

a. Montrer que, si elles existent, les fonctions u sont solutions de l'équation différentielle :

(3) $$\alpha u'' + u = 0$$

b. Montrer que (3) ne peut avoir de solution dans $\mathcal{E}$, non identiquement nulle, que pour certaines valeurs de α que l'on précisera.

c. Déterminer, lorsqu'elles existent, les fonctions u cherchées.

II Au cours d'une certaine expérience, deux événements A et B peuvent se produire, à des instants aléatoires, une seule fois chacun. On associe à cette expérience les variables aléatoires X et Y, X représentant le temps écoulé depuis le début de l'expérience jusqu'à la réalisation de A, Y représentant le temps écoulé depuis le début de l'expérience jusqu'à la réalisation de B. On admet que X et Y sont des variables indépendantes, de densités de probabilité respectives :

$$f_X : \begin{cases} x \longmapsto \frac{1}{2}, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2 \\ x \longmapsto 0, & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > 2 \end{cases} \qquad f_Y : \begin{cases} y \longmapsto e^{-y}, & \text{si } y \geqslant 0 \\ y \longmapsto 0, & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

1° *a.* Soit U la variable aléatoire représentant le temps écoulé depuis le début de l'expérience jusqu'à la réalisation d'un premier événement. Déterminer la densité de probabilité de U.

b. Soit V la variable aléatoire représentant le temps écoulé depuis le début de l'expérience jusqu'à ce que les deux événements soient réalisés. Déterminer la densité de probabilité de V.

c. Soit la variable aléatoire $W = Y - X$. Déterminer la fonction de répartition de W; calculer son espérance et sa variance.

2° Un chronomètre se met en marche dès qu'un premier événement est réalisé et s'arrête à la réalisation du deuxième.

a. Soit Z la variable aléatoire représentant le temps ainsi enregistré. Déterminer la fonction de répartition de Z.

b. Un observateur se présente au temps t après le début de l'expérience; il constate que le chronomètre est en marche.

Calculer la probabilité pour que l'événement déjà réalisé soit l'événement A, pour les valeurs $t = 1$ et $t = 2$.

3° Un deuxième chronomètre se met en marche lorsque A se produit et s'arrête lorsque B se produit, mais ne fonctionne pas si B se produit avant A. Soit T la variable aléatoire représentant le temps ainsi enregistré.

a. Déterminer la fonction de répartition de T.

b. Quelle propriété particulière possède cette fonction de répartition? Comment l'interpréter?

FIN